Objetivos a cubrir **Código : MAT-CDI.3**

- Función par, impar, creciente, decreciente e inyectiva.
- Identidades trigonométricas. Funciones trigonométricas.
- Operaciones de funciones trigonométricas: suma, diferencia, producto, cociente y composición.
- Formulación de funciones. Dominio admisible.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1 *: Demostrar la identidad*

$$\csc x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$$

Demostración : Es conocido que

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x},$$

así,

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1+\cos x - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} \qquad \Longrightarrow \qquad \csc x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

aplicando la conjugada trigonométrica al segundo sumando de la última igualdad, tenemos

$$\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{(1-\cos x)}{\operatorname{sen} x}\frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)},$$

De la identidad básica trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1,$$

se tiene que,

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

luego

$$\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$$

por lo tanto,

$$\csc x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$$

★

Ejemplo 2 *: Diga si la función* $f(x) = \dfrac{|x| - x^2}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ *es una función par, impar ó ninguna de las dos*

Solución : Es conocido que una función f es par, si y solo si

$$f(-x) = f(x)$$

para todo $x \in \operatorname{Dom} f$ y f es impar, si y solo si

$$f(-x) = -f(x)$$

para todo $x \in \operatorname{Dom} f$, así,

$$f(-x) = \frac{|-x| - (-x)^2}{\operatorname{sen}(-x) + \cos(-x)} = \frac{|x| - x^2}{-\operatorname{sen} x + \cos x},$$

puesto que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ (función impar) y $\cos(-x) = \cos x$ (función par). Observemos que

$$f(-x) \neq f(x) \qquad \text{y} \qquad f(-x) \neq -f(x)$$

por lo que concluimos que f no es una función par, ni impar. ★

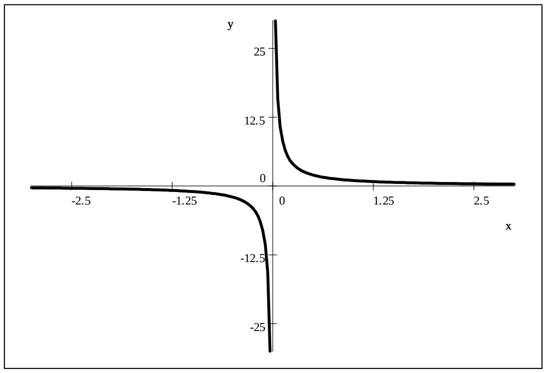
Ejemplo 3 : *Determine la gráfica de la función usando traslaciones*

$$g(x) = \frac{8-3x}{x-2}$$

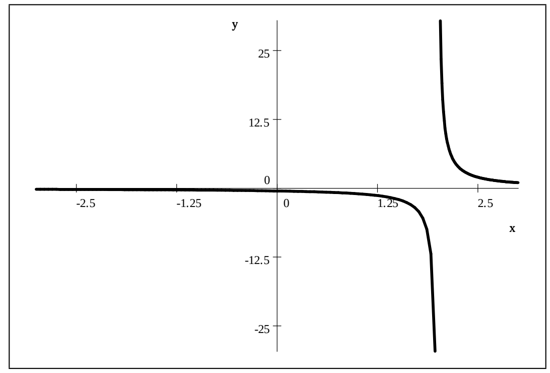
Solución : Observemos que la función g se puede escribir como

$$g(x) = \frac{8-3x}{x-2} = \frac{2}{x-2} - 3$$

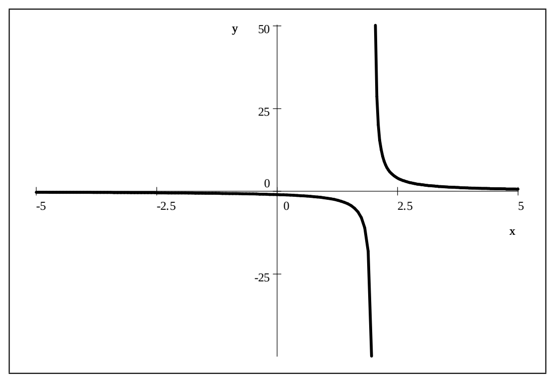
así la función básica asociada a g es la función hipérbola básica $f(x) = \dfrac{1}{x}$



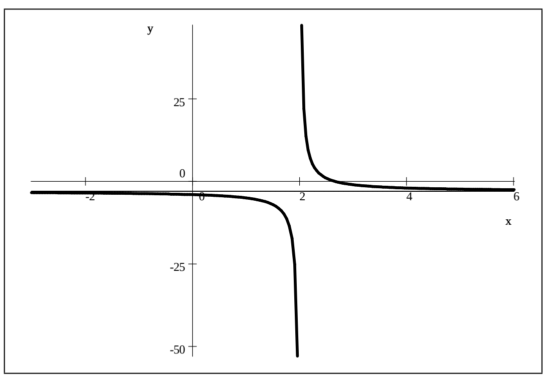
$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$
$$\longrightarrow$$



$$\downarrow \qquad f(x) = \frac{2}{x-2}$$



$$f(x) = \frac{2}{x-2} - 3$$
$$\longleftarrow$$



★

Ejemplo 4 : *Represente gráficamente la siguiente región del plano*

$$|x| + |y| \geq 1; \qquad x^2 + y^2 \leq 9$$

Solución : Consideremos la expresión $|x| + |y| \geq 1$, por definición de valor absoluto se tiene

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad |y| = \begin{cases} y & \text{si} \quad y \geq 0 \\ -y & \text{si} \quad y < 0 \end{cases}$$

de donde se desprende los siguientes casos

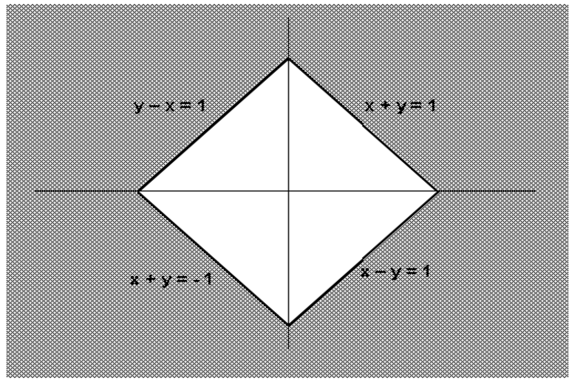
- **Caso I :** Si $x \geq 0$ y $y \geq 0$, entonces la desigualdad $|x| + |y| \geq 1$ nos queda $x + y \geq 1$

- **Caso II :** Si $x \geq 0$ y $y < 0$, entonces la desigualdad $|x| + |y| \geq 1$ nos queda $x - y \geq 1$

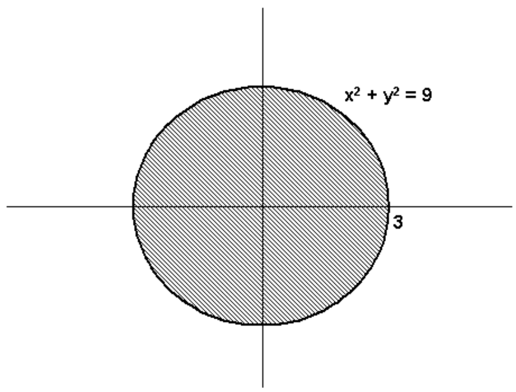
- **Caso III :** Si $x < 0$ y $y \geq 0$, entonces la desigualdad $|x| + |y| \geq 1$ nos queda $-x + y \geq 1$

- **Caso IV :** Si $x < 0$ y $y < 0$, entonces la desigualdad $|x| + |y| \geq 1$ nos queda $-x - y \geq 1$

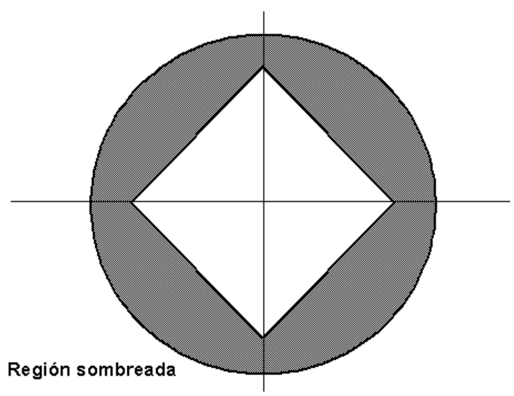
Tenemos la grafica de la expresión $|x|+|y|\geq 1$



por otro lado, $x^2+y^2\leq 9$ representa la parte interna del circulo de centro el origen y radio $r=3$,



luego la región buscada es la intersección de ambas regiones



★

Ejemplo 5 *: Diga en que intervalo la función*

$$h(x)=\frac{2x-5}{x+3}$$

es creciente ó decreciente

Solución : Una función f es **creciente** es un intervalo I si, para todo $x_1,x_2\in I$, tal que $x_1<x_2$ se tiene que $f(x_1)<f(x_2)$, es decir,

$$x_1<x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1)<f(x_2),$$

mientras que, una función f es **decreciente** es un intervalo I si para todo $x_1,x_2\in I$, tal que $x_1<x_2$ se tiene que $f(x_1)>f(x_2)$, es decir,

$$x_1<x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1)>f(x_2).$$

Observemos que la función h se puede escribir como

$$h(x) = \frac{2x-5}{x+3} = 2 - \frac{11}{x+3}$$

y que $\operatorname{Dom} h = \mathbb{R} - \{-3\}$, sean $x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} h$, tal que $x_1 < x_2$

$$x_1 < x_2 \quad \overset{\substack{\text{Sumamos 3} \\ \text{(la desigualdad se mantiene)} \\ \downarrow}}{\Longrightarrow} \quad x_1 + 3 < x_2 + 3 \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Aplicamos } \frac{1}{(\cdot)} \\ \text{(la desigualdad cambia)}}}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{x_1+3} > \frac{1}{x_2+3} \quad \overset{\substack{\text{Multiplicamos por } -11 \\ \text{(la desigualdad cambia)} \\ \downarrow}}{\Longrightarrow} \quad \frac{-11}{x_1+3} > \frac{-11}{x_2+3} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Sumamos 2} \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}{\Longrightarrow} \quad 2 - \frac{11}{x_1+3} < 2 - \frac{11}{x_2+3}$$

con lo que,

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad 2 - \frac{11}{x_1+3} < 2 - \frac{11}{x_2+3},$$

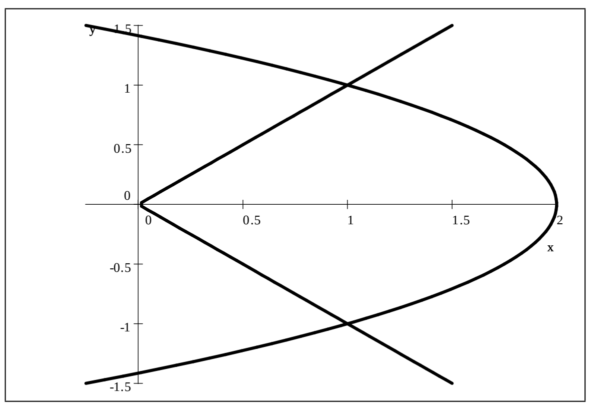
es decir,

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad h(x_1) < h(x_2)$$

por lo tanto, h es una función creciente en todo su dominio. ★

Ejemplo 6 *: Dibuje la región limitada por* $x = 2 - y^2$ *y* $x = |y|$

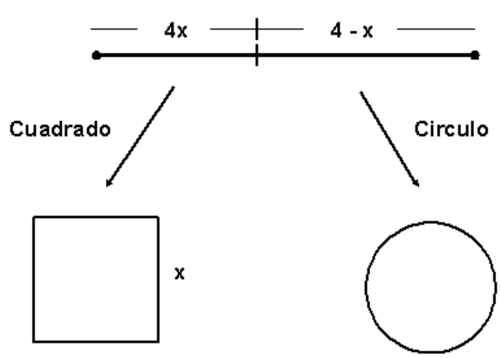
Solución : Graficamente



★

Ejemplo 7 *: Se tiene un alambre de 4 m de longitud y se divide en dos trozos para formar un cuadrado y un círculo. Expresar el área total encerrada en ambas figuras en función de x, siendo x el lado del cuadrado. Hallar el dominio donde está definida la función.*

Solución : Del alambre de 4 m debemos formar un cuadrado y un circulo de tal forma que cada lado del cuadrado mida x m.



El área del cuadrado es $A_{\text{cuadrado}} = (\text{lado})^2$, mientras que, el área del circulo es $A_{\text{circulo}} = \pi\,(\text{radio})^2$, por lo tanto

$$A_{\text{cuadrado}} = x^2,$$

deduzcamos el radio del circulo, observemos que el perímetro del círculo es $4-x$, que es la longitud del alambre que tenemos para forma la figura geométrica, puesto que el perímetro del círculo es $P = 2\pi\,(\text{radio})$, entonces,

$$4 - x = 2\pi\,(\text{radio}) \qquad \Longrightarrow \qquad \text{radio} = \frac{4-x}{2\pi},$$

por lo tanto,

$$A_{\text{circulo}} = \pi \left(\frac{4-x}{2\pi}\right)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad A_{\text{circulo}} = \frac{(4-x)^2}{4\pi}.$$

Luego, el area total es

$$A_{\text{total}}\,(x) = A_{\text{cuadrado}} + A_{\text{circulo}} = x^2 + \frac{(4-x)^2}{4\pi}$$

cuyo dominio es $\text{Dom}\, A_{\text{total}} = (0,1)$. ★

Ejercicios

1. Determine cuales de las siguientes funciones son pares, impares ó ninguna de ellas

1. $f(x) = 3$	2. $f(x) = 5x$	3. $f(x) = 2x - 1$	4. $f(x) = x^2 - x$
5. $f(x) = x^3 - x$	6. $f(x) = x^4 - x^2$	7. $f(x) = x^4 - x^2 + 3$	8. $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}$

2. Sea f una función cuyo dominio contiene a $-x$ siempre que contenga a x. Demuestre que
   (a) $f(x) + f(-x)$ es una función par.
   (b) $f(x) - f(-x)$ es una función impar.
   (c) f puede escribirse como la suma de una función par y una función impar.

3. Sean f y g funciones par. Demuestre que
   (a) $f + g$ es una función par. ¿Qué se puede afirmar de $f - g$?
   (b) fg es una función par.
   (c) $\dfrac{f}{g}$ es una función pares, siempre que $g(x) \neq 0$.

4. Sean f y g funciones impares. Demuestre que
   (a) $f + g$ es una función impar. ¿Qué se puede afirmar de $f - g$?
   (b) fg es una función par.
   (c) $\dfrac{f}{g}$ es una función par, siempre que $g(x) \neq 0$.

5. Sean f una función par y g una función impar. ¿Qué se puede afirmar de $f+g$, $f-g$, fg y $\dfrac{f}{g}$?

6. Demostrar las siguientes identidades trigonométricas

1. $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$	2. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$	3. $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
4. $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$	5. $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$	6. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
7. $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$	8. $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$	9. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
10. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$	11. $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$	12. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

13. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{sen}x$ 14. $\sec x=\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen}x}$ 15. $\csc x=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}+\dfrac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}$

16. $\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y=2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ 17. $\cos x+\cos y=2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

18. $\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y=-\dfrac{1}{2}\left(\cos(x+y)-\cos(x-y)\right)$ 19. $\cos x\cos y=\dfrac{1}{2}\left(\cos(x+y)+\cos(x-y)\right)$

20. $\operatorname{sen}x\cos y=\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)\right)$ 21. $\operatorname{sen}y\cos x=\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(x+y)-\operatorname{sen}(x-y)\right)$

22. $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$ 23. $\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$

24. $\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ 25. $\operatorname{sen}^4 x-\cos^4 x=-\cos 2x$ 26. $\dfrac{1}{\operatorname{sen}x\cdot\cos x}-\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}=\tan x$

27. $\operatorname{sen}x=\dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ 28. $\dfrac{1-\operatorname{sen}2x}{1+\operatorname{sen}2x}=\dfrac{\tan(\pi/4-x)}{\tan(\pi/4+x)}$

7. Calcular los valores de las siguientes expresiones

1. $5\operatorname{sen}^2 45^\circ+8\cos^2 30^\circ$ 2. $3\operatorname{sen}30^\circ+6\cos^2 45^\circ$ 3. $5\tan^2 45^\circ+2\sec^2 45^\circ$

4. $4\cos 60^\circ+5\csc 30^\circ$ 5. $4\cos 30^\circ+6\operatorname{sen}45^\circ$ 6. $6\tan 30^\circ+2\csc 45^\circ$

7. $\operatorname{sen}^2 30^\circ+\sec^2 45^\circ$ 8. $\cos^2 60^\circ+\operatorname{sen}^2 45^\circ$ 9. $\csc^2 45^\circ+\cos^2 30^\circ$

10. $\csc^2 30^\circ+\tan^2 45^\circ$ 11. $\dfrac{\operatorname{sen}30^\circ+\csc 30^\circ}{\operatorname{sen}^2 30^\circ+\cos^2 60^\circ}$ 12. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 45^\circ+\operatorname{sen}^2 30^\circ}{\cos^2 45^\circ+\sec^2 45^\circ}$

13. $\dfrac{\cos^2 30^\circ+\tan^2 30^\circ}{\operatorname{sen}^2 45^\circ+\cos^2 60^\circ}$ 14. $\dfrac{\tan^2 30^\circ+\operatorname{sen}^2 30^\circ}{\csc^2 45^\circ+\csc^2 30^\circ}$ 15. $\dfrac{\cos 60^\circ+\cos 30^\circ}{\csc^2 30^\circ+\operatorname{sen}^2 45^\circ}$

8. Calcular los valores de las siguientes expresiones

1. $-\operatorname{sen}315^\circ+2\cos 150^\circ$ 2. $4\operatorname{sen}240^\circ+\cos^2 135^\circ$ 3. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\tan 510^\circ+2\csc 675^\circ$

4. $\dfrac{1}{2}\tan 225^\circ+6\sec^2 225^\circ$ 5. $-\cos 300^\circ+3\operatorname{sen}900^\circ$ 6. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2040^\circ+\sqrt{2}\operatorname{sen}1215^\circ$

7. $\operatorname{sen}^2 870^\circ+\sec^2 585^\circ$ 8. $\dfrac{3}{5}\cos^2 960^\circ+\operatorname{sen}^2 960^\circ$ 9. $\csc^2 1395^\circ+\sqrt{3}\cos^2 1200^\circ$

10. $\csc^2 585^\circ+\tan^2 1665^\circ$ 11. $\dfrac{\operatorname{sen}135^\circ+\csc 240^\circ}{\operatorname{sen}^2 225^\circ+\cos^2 315^\circ}$ 12. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 2400^\circ+\operatorname{sen}^2 2025^\circ}{\cos^2 405^\circ+\sec^2 405^\circ}$

13. $\dfrac{\cos^2 945^\circ+\tan^2 945^\circ}{\operatorname{sen}^2 945^\circ+\cos^2 420^\circ}$ 14. $\dfrac{\tan^2 750^\circ+\operatorname{sen}^2 1110^\circ}{\csc^2 135^\circ+\csc^2 300^\circ}$ 15. $\dfrac{\cos 300^\circ+\cos 390^\circ}{\csc^2 390^\circ+\operatorname{sen}^2 420^\circ}$

9. Desarrollar los siguientes productos notables

1. $(1-\cos(x+\pi))^2$ 2. $(\operatorname{sen}x-\cos x)^2$ 3. $(\tan x+\cot x)^2$

4. $(1-\cos x)(1+\cos x)$ 5. $(1-\sec\alpha)(1+\sec\alpha)$ 6. $\left(1-\cot^2 x\right)\left(1-\cos^2 x\right)$

7. $\left(\cos x-\operatorname{sen}^2 x\right)(\cos x-\cos 2x)$ 8. $[\tan(2\alpha)-\tan(\alpha/2)]\,[\tan(2\alpha)-\tan(\alpha/2)]$

9. $(\operatorname{sen}x-3)(\operatorname{sen}x-2)$ 10. $\cos^2 x(\operatorname{sen}x+2)(\operatorname{sen}x-1)$

10. Factorizar las siguientes expresiones trigonométricas en productos de factores irreducibles

1. $\cos^2 x+3\cos x+2$ 2. $\tan^2 x+\tan x-2$ 3. $2\cos^2 x+\cos x-1$

4. $2\tan^2 x-3\tan x+1$ 5. $8\sec^2 x-14\sec x+3$ 6. $1-\cos^3 x$

7. $\operatorname{sen}^3 x+8$ 8. $\operatorname{sen}^4 x+\operatorname{sen}x$ 9. $1+\operatorname{sen}2x$ 10. $\sec^4 x-\tan^4 x$

11. $\csc^2 2x - 2\cos^2 x$ 12. $\tan^3 x - \operatorname{sen}^3 x$ 13. $\tan^2 2x - \tan^2(-x+\pi/2)$

14. $1 + \operatorname{sen} 2ax - \cos 2ax$ 15. $\operatorname{sen}(a+x) + \operatorname{sen}(a-x) - 2\operatorname{sen} a$

16. $\operatorname{sen} 4x + 2\operatorname{sen}^2 2x - 2\operatorname{sen} 2x$ 17. $2 - 4\operatorname{sen} x + \cos 2x - 2\operatorname{sen} x \cos 2x$

18. $\operatorname{sen}^4 x - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$

11. Racionalizar los siguientes numeradores y simplificar, si es posible

1. $\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x} - \sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{\tan x}$ 2. $\dfrac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{\operatorname{sen} x}$ 3. $\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

4. $\dfrac{\sqrt[3]{\cos x} - \sqrt[3]{\operatorname{sen} 2x}}{\cos x}$ 5. $\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x} - \sqrt[3]{\cos^2 x}}{1 - \tan x}$

12. Simplificar las siguientes expresiones

1. $\dfrac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1}$ 2. $\dfrac{\cos^2 x - 3\cos x + 2}{2 - 2\cos x - \operatorname{sen}^2 x}$ 3. $\dfrac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x}$

4. $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^3 x} \cdot \dfrac{\tan x - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}$ 5. $\dfrac{1 - \tan(x + \pi/4)}{\operatorname{sen} x}$ 6. $\dfrac{\tan^3 x - \operatorname{sen}^3 x}{(1-\cos x)^2}$

7. $\dfrac{1 - \cot^3 x}{2 - \cot x - \cot^2 x}$ 8. $\dfrac{\tan 2x \cot(x + \pi/4)}{(1 - \tan x)\sec 2x}$ 9. $\dfrac{\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen}^2 2x - 2\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x - \cos^2 2x}$

10. $\dfrac{\tan x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} + \dfrac{\cos 2x - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$ 11. $\operatorname{sen}(\pi + x) \cdot \csc(\pi - x) \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$

12. $2\operatorname{sen}\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) + 4\cos\pi - 2\tan(3\pi + \alpha) - \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) + 4\operatorname{sen}\left(\dfrac{7\pi}{2}\right)$ 13. $\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{\cot x}{\operatorname{sen} x}$

14. $\tan(-x) \cdot \cot\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) - \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \tan(\pi - x)$ 15. $(\tan x - \tan a) \cdot \cot(x - a)$

16. $\dfrac{\frac{1}{x}\tan(\pi + x^2)}{\operatorname{sen} \pi x}$ 17. $a^2\cos(\pi + x) + b^2\cos(\pi - x) - 2ab\operatorname{sen}(-x)\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

18. $\dfrac{a^2\cot(\pi + x) + b^2\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)}{(a-b)\cot(\pi - x)} + \dfrac{(a+b)\tan\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)}$ 19. $\dfrac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{1}{1 - \cos x}$

20. $-2\cos x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos\left(\cos^2 x\right) \cdot \cos\left(\operatorname{sen}^2 x\right) - 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\cos^2 x\right)$

21. $\dfrac{2\cos^2 x - \cos x - 3}{1 - \cos^2 x} + \dfrac{2\cot x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$ 22. $\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + x}{x^2 - 1}\right)\left(\dfrac{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}{1 - \operatorname{sen}^2 2x}\right)$

23. $\dfrac{\tan 2x \cot(x + \pi/4)}{(1 - \tan x)\sec 2x} \cdot \left\{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \operatorname{sen}(x + \pi)\right\}$

13. Encuentre el cuadrante que contiene a x, suponiendo que

1. $\sec x < 0$ y $\operatorname{sen} x > 0$ 2. $\cot x > 0$ y $\csc x < 0$ 3. $\cos x > 0$ y $\tan x < 0$

14. Transformar a radianes los siguientes ángulos y reducirlos al intervalo $[0, 2\pi]$

1. $120°$ 2. $300°$ 3. $285°$ 4. $-150°$ 5. $420°$ 6. $500°$

15. Calcular en radianes el valor α en cada uno de los siguientes casos

(a) α es igual a su complemento.
(b) α es igual a $4/5$ de su suplemento.

(c) α es igual a $1/3$ de su suplemento menos dos veces su complemento.

16. Hallar en grados la medida del ángulo correspondiente a un arco cuya longitud es 50 m en un círculo de 25 m de radio.

17. Hallar la longitud del arco correspondiente a un ángulo de 4 radianes en un círculo cuyo radio es 25 m.

18. Hallar todas las funciones trigonométricas de α, si se sabe que $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ y α pertenece al III cuadrante.

19. Hallar todas las funciones trigonométricas de β, si se sabe que $\sec\beta = -5/4$ y β pertenece al II cuadrante.

20. Hallar $\operatorname{sen}\beta$, si se sabe que $\cos\beta = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ y β pertenece al III cuadrante.

21. Hallar $\operatorname{sen}\alpha$, si se sabe que $\cot\alpha = \dfrac{y^2-x^2}{2xy}$ y α pertenece al II cuadrante.

22. Si $\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{2}$, expresar sólo en función de $\operatorname{sen}2\beta$, la siguiente fracción

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha\cdot\left(1-\cos^2\beta\right)}{\tan^2\alpha\cdot\left(1+\cot^2\alpha\right)\cdot\csc^2\alpha}.$$

23. Escribir las siguientes expresiones sólo en función $\cot\alpha$

1. $\tan^2\alpha + 2\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha$ 2. $\sec^2\alpha\cdot\left(\sec^2\alpha-1\right) - \dfrac{1}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}-1}$

24. Demostrar que si $\cos(x+y)=0$, entonces $\operatorname{sen}(x+2y) = \operatorname{sen}x$.

25. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas para $0\le x\le 2\pi$

1. $-2\operatorname{sen}2x\cdot\sec x = 0$ 2. $\dfrac{1}{\sec^2 x - 3} = 1$ 3. $2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$ 4. $2\cos x - 2\cos 2x = 0$

5. $r^2\cos x + r^2\cos 2x = 0$ 6. $2\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen}x - 1 = 0$ 7. $4\operatorname{sen}^2 x\cdot\tan x - \tan x = 0$

8. $\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} = \dfrac{\tan x}{2\cos x}$ 9. $\cot x - \tan x = \dfrac{2\cos 2x}{1-\cos 2x}$

26. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas para x en $\mathbb{R}$.

1. $\operatorname{sen}x = 0$ 2. $\cos x = 0$ 3. $\tan x = 0$ 4. $\sec x = 0$ 5. $\csc x = 0$

6. $\cot x = 0$ 7. $\operatorname{sen}x = 1$ 8. $\cos x = 1$ 9. $\tan x = 1$ 10. $\sec x = 1$

11. $\csc x = 1$ 12. $\cot x = 1$ 13. $\operatorname{sen}x = -1$ 14. $\cos x = -1$ 15. $\tan x = -1$

16. $\sec x = -1$ 17. $\csc x = -1$ 18. $\cot x = -1$ 19. $\operatorname{sen}x - \cos x = 0$

20. $\sec x = \operatorname{sen}x$ 21. $\tan x = 2\operatorname{sen}x$ 22. $\cos x - \cot x = 0$ 23. $\operatorname{sen}x + \csc x = 0$

24. $\cos x - \sqrt{3}\operatorname{sen}x = 0$ 25. $6\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen}2x = 0$ 26. $3^{1/2}\operatorname{sen}x\cdot\cos x + 4\cos^2 x = \dfrac{15}{4}$

27. $4\cos^4 x - \cos^2 x = \dfrac{3}{2}$ 28. $\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = 1+\cos 2x$

29. $2\cos^2 x - \operatorname{sen}x - 1 = 0$

27. Hallar las funciones que al componerlas se obtenga

1. $f(x) = \cos^2(\operatorname{sen}x)$ 2. $f(x) = \cos\left(\operatorname{sen}^2 x\right)$ 3. $f(x) = \cos\left(\operatorname{sen}x^2\right)$

4. $f(x) = \operatorname{sen}(1-\tan x)$ 5. $h(x) = \cos\left(1-\sqrt{x+3}\right)$ 6. $g(x) = -\operatorname{sen}\left(\sqrt{x-5}-2\right)$

7. $g(x) = \sec^6\left(x^2-5x+6\right)$ 8. $h(x) = 3 - \dfrac{3-\cos x}{\cos x + 5}$ 9. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{3x^2+5}\right)$

10. $g(x) = -\sqrt{1-\cot^2\left(x^2-2x-3\right)}$ 11. $g(x) = \csc\sqrt{\tan\left(x^2+3\right)}+8$

28. Determine el dominio de las siguientes funciones

1. $f(x)=\tan x$ 2. $f(x)=\sec x$ 3. $f(x)=\csc x$ 4. $f(x)=\cot x$

5. $g(x)=\cos\left(\dfrac{x-5}{x^2-x}\right)$ 6. $f(x)=\sqrt[3]{\operatorname{sen} x+1}$ 7. $f(x)=\dfrac{3-\operatorname{sen}\left(\sqrt{x-5}-2\right)}{\sqrt{7-2x}}$

8. $f(x)=\sqrt[4]{\operatorname{sen} x}-\sec x$ 9. $f(x)=\sqrt{1-\operatorname{sen} x}$ 10. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}$

11. $h(x)=\cos\left(\sqrt{x^2+5x+6}\right)-\tan 2x$ 12. $f(x)=\sqrt{\sqrt{-x}+3}+\sqrt[3]{x}-\sec 2x$

29. Determine cuales de las siguientes funciones son pares, impares ó ninguna de ellas

1. $f(x)=\tan x$ 2. $f(x)=\sec x$ 3. $f(x)=\csc x$ 4. $f(x)=\cot x$

5. $g(x)=\dfrac{x^3+x}{x+\operatorname{sen} x}$ 6. $f(x)=\operatorname{sen} 3x+2x^2$ 7. $f(x)=\dfrac{\tan x}{\sec x-x^2}$

8. $f(x)=\sqrt{x}-x\cos x$ 9. $f(x)=x^5-6x^9+\dfrac{\operatorname{sen} x}{(1+x^4)^4}$

30. Demuestre que la función $f(x)=x^4$ no es inyectiva.

31. Demuestre que la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ es inyectiva, pero $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ no lo es.

32. Demuestre que una función f es inyectiva, si y solo si es estrictamente monótona, es decir, f es siempre creciente ó es siempre decreciente.

33. Diga en que intervalo las siguientes funciones son crecientes ó decrecientes (ver guía 1, ejercicios 14 al 26)

1. $f(x)=mx+b$ 2. $f(x)=x^2$ 3. $f(x)=x^3$ 4. $f(x)=x^4$ 5. $f(x)=\dfrac{1}{x}$

6. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 7. $f(x)=\sqrt{x}$ 8. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 9. $f(x)=\sqrt{x^3-2}$ 10. $f(x)=\dfrac{3}{x^2+1}$

11. $g(x)=x^2-4x$ 12. $g(x)=\dfrac{8-3x}{x-2}$ 13. $h(x)=\dfrac{2x-5}{x+3}$ 14. $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+1}$

34. Usando el ejercicio 32, diga cuales de las funciones del ejercicio 33 es inyectiva.

35. Demuestre que si f y g son funciones crecientes, entonces $f\circ g$ es una función creciente.

36. Demuestre que si f y g son funciones decrecientes, entonces $f\circ g$ es una función creciente.

37. Demuestre que si f es una función creciente y g es una función decreciente, entonces $f\circ g$ es una función decreciente.

38. Sea $f:\operatorname{Dom} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función creciente. Demuestre que la recta que pasa por dos puntos cualesquiera pertenecientes a la función tiene pendiente positiva.

39. Sea $f:\operatorname{Dom} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función decreciente. Demuestre que la recta que pasa por dos puntos cualesquiera pertenecientes a la función tiene pendiente negativa.

40. Determine la gráfica de la función usando traslaciones

1. $g(x)=x^2-2$ 2. $f(x)=(x-1)^2+3$ 3. $f(x)=x^2+x+1$ 4. $h(x)=2-x^3$

5. $f(x)=\sqrt[3]{x+2}$ 6. $g(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{2}$ 7. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-2$ 8. $f(x)=x^2-4x$

9. $g(x)=1-\sqrt{x-3}$ 10. $h(x)=\dfrac{2x-5}{x+3}$ 11. $g(x)=\dfrac{(x+1)^2}{2}$ 12. $f(t)=\operatorname{sen} t-1$

13. $f(x)=x^2+4x-1$ 14. $f(x)=2+\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 15. $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}+2$

16. $g(x) = \dfrac{1}{x-3} + 2$ 17. $h(x) = |x-4| - 3$ 18. $h(x) = \dfrac{3}{5}\sqrt{x+2} - 3$

19. $g(x) = |\operatorname{sen} x| - 2$ 20. $g(x) = \left|x^2 - 4x\right|$ 21. $h(x) = \left|x^2 - x + 1\right|$

22. $g(x) = \dfrac{8-3x}{x-2}$ 23. $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+1}$ 24. $f(x) = \dfrac{3x^2-12x+13}{x^2-4x+4}$

41. Dibuje la región limitada por las curvas dadas

1. $y = x^2, \quad y = x^4$
2. $y = x^4, \quad y = -x-1, \quad x = -2, \quad x = 0$
3. $y = x, \quad y = x^3$
4. $x + y^2 = 0, \quad x = y^2 + 1, \quad y = 0, \quad y = 3$
5. $y = x^2 - 4x, \quad y = 2x$
6. $x = 3y, \quad x + y = 0, \quad 7x + 3y = 24$
7. $y = x, \quad y = x^2$
8. $y^2 = x, \quad y = x + 5, \quad y = -1, \quad y = 2$
9. $y = x^2, \quad y^2 = x$
10. $y = x^2 + 3, \quad y = x, \quad x = -1, \quad x = 1$
11. $y = \sqrt{x}, \quad y = x/2$
12. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen} 2x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$
13. $y = 4x^2, \quad y = x^2 + 3$
14. $y = x^2 + 2, \quad y = 2x + 5, \quad x = 0, \quad x = 6$
15. $y = x^4 - x^2, \quad y = 1 - x^2$
16. $y = 4 - x^2, \quad y = x + 2, \quad x = -3, \quad x = 0$
17. $x + y^2 = 2, \quad x + y = 0$
18. $y = x^2 + 2x + 2, \quad y = x + 4, \quad x = -3, \quad x = 2$
19. $y^2 = x, \quad x - 2y = 3$
20. $y = x^2 + 1, \quad y = 3 - x^2, \quad x = -2, \quad x = 2$
21. $x = 1 - y^2, \quad x = y^2 - 1$
22. $y = |x|, \quad y = (x+1)^2 - 7, \quad x = -4$
23. $y = 2x - x^2, \quad y = x^3$
24. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen} x, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/2$
25. $x = 1 - y^4, \quad x = y^3 - y$
26. $y = \cos x, \quad y = \sec^2 x, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/4$
27. $y = x^3, \quad x = y^3$
28. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \operatorname{sen} 2x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$
29. $y = x\sqrt{1-x^2}, \quad y = x - x^3$
30. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \cos 2x, \quad x = 0, \quad x = \pi/4$
31. $y = x^2 - 4x + 3, \quad y = 0$
32. $y = |x-1|, \quad y = x^2 - 3, \quad x \geq 0$
33. $y = 4 + 3x - x^2, \quad y = 0$
34. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen} 2x, \quad x = \pi/2, \quad x = \pi$
35. $y = \sqrt{x-4}, \quad y = 0, \quad x = 8$
36. $x^2 + 2x + y = 0, \quad x + y + 2 = 0$
37. $x = y^4, \quad x = 2 - y^4$
38. $y = x^3 - 4x^2 + 3x, \quad y = x^2 - x$
39. $x = 6y - y^2, \quad x = 0$
40. $y = \sqrt{x-1}, \quad x - 3y + 1 = 0$

42. Represente gráficamente las siguientes regiones del plano

1. $xy \leq 0$
2. $xy > 0$
3. $xy \geq 0$
4. $x > 0; \quad y \geq 0$
5. $x \geq 0; \quad y \leq 0$
6. $x^2 + y^2 \leq 4$
7. $x^2 + y^2 < 4$
8. $x^2 + y^2 \geq 9$
9. $(x-4)^2 + (y-4)^2 \leq 4$
10. $y \leq 3 - 2x; \quad xy > 0$
11. $y \leq 3 - 2x; \quad x > 0; \quad y > 0$
12. $|x| + |y| \leq 1$
13. $|x| + |y| < 1$
14. $x^2 + y^2 \leq 9; \quad x^2 + y^2 > 1$
15. $y^2 < x$
16. $y^2 > x$
17. $x^2 + y^2 < 25; \quad (x-4)^2 + (y-4)^2 \leq 4$
18. $x^2 + y^2 \leq 9; \quad x^2 + y^2 \geq 2; \quad y \geq |x|$
19. $xy \leq 1; \quad xy < -1$
20. $x^2 + y^2 \leq 16; \quad (x+2)^2 + y^2 > 1; \quad (x-2)^2 + y^2 \geq 1$
21. $|x| + |y| \leq 6; \quad x^2 + y^2 > 1$
22. $|x| + |y| \geq 6; \quad x^2 + y^2 \leq 36$
23. $|x| - |y| \geq 0$
24. $|x| - |y| \leq 0$
25. $|x| + |y| > 6; \quad x^2 + y^2 \leq 36$
26. $|x| + |y| > 6; \quad x^2 + y^2 < 36$
27. $|x| + |y| \leq 6; \quad (x+2)^2 + y^2 \geq 1; \quad (x-2)^2 + y^2 > 1$
28. $y^2 > 8x; \quad y^2 + 2(x-4) \leq 0$

29. $xy \leq 1$; $xy < -1$; $x^2 + y^2 \leq 4$ 30. $0 \leq y \leq \sqrt{x}$; $(x-3)^2 + y^2 > 1$

31. $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x < 4$; $y \leq 4$ 32. $x^2 + y^2 \leq 1$; $y - |x| + 3 \geq 0$; $y + x^2 \leq 16$

43. Expresar el área A de un cuadrado en función de su lado l. Hallar el dominio de la función.

44. Expresar el área A de un triángulo equilátero en función del lado l. Hallar el dominio de la función.

45. Una recta que pasa por el punto $N(-3, 1)$ y forma con los ejes coordenados el triángulo rectángulo AOB. Expresar su área en función de la pendiente de la hipotenusa. Hallar su dominio.

46. Dos postes de 12 y 28 m. de altura distan entre sí 30 m. Se desea unir los extremos superiores de dichos postes, con un cable que esté fijo en un punto único del suelo entre los postes y a una distancia x del poste de menor altura. Exprese la longitud del cable en función de x y calcule su dominio

47. Una página rectangular debe contener 96 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior tienen 3 cm de anchura y los laterales 2 cm. Exprese el área de la página en función de la variable x, siendo x el ancho del área impresa. Hallar el dominio donde está definida la función.

48. Se tiene un alambre de 4 m de longitud y se divide en dos trozos para formar un cuadrado y un círculo. Expresar el área total encerrada en ambas figuras en función de x, siendo x el lado del cuadrado. Hallar el dominio donde está definida la función.

49. En el triángulo rectángulo ABC, con hipotenusa AC igual a 7, expresar la longitud del cateto AB en función de la hipotenusa y el otro cateto y calcular su dominio.

50. En el triángulo rectángulo DEF, rectángulo en E. Si: $DE = a$; $EF = b$ y $DM = x$ (medido sobre el cateto DE); expresar la longitud del segmento MN (paralelo a EF) en función de los datos suministrados. Hallar el dominio de la función.

51. Dado un triángulo isósceles cuyos lados iguales l forman $30°$ con el lado desigual, hallar el área del triángulo en función de la longitud de los lados iguales. Hallar el dominio.

52. Un ganadero tiene 2000 metros de valla para cercar dos corrales rectangulares adyacentes idénticos. Expresar el área total que pudiera cercarse sólo en función del lado no común x de los corrales. Dominio.

53. Expresar el área A de un triángulo equilátero en función de su altura h.

54. Expresar el área A de una esfera en función de su diámetro.

55. Expresar el perímetro P de un rectángulo de área igual a 10 cm^2 como función de uno de sus lados x.

56. Hallar el volumen V de una esfera en función de su área superficial A.

57. Expresar el volumen V de un cubo en función del área A de su base.

58. Sea ABC un triángulo isósceles de base igual a 6 cm y altura igual a 8 cm y sea M el punto medio de la base AC. Si una recta paralela a la base corta en P y en Q a los lados AB y BC, expresar el área del triángulo PMQ solamente en función de su altura.

59. Si la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a 10 cm, expresar el perímetro en función de uno de los ángulos variables.

60. Una recta pasa por el punto $M(3, -1)$ y forma con los ejes coordenados el triángulo rectángulo AOB. Expresar su perímetro en función de la pendiente de la hipotenusa.

61. Expresar el área A de un rectángulo de perímetro constante P, como función de la longitud l de uno de sus lados.

62. Expresar el radio r de un circulo en función de su perímetro P.

63. >Cuál es el área, A, de una cara de un cubo en función de su volumen V?

64. Una caja cerrada con base cuadrada, de lado l y altura h tiene un área total de 200 cm^2. Hallar el volumen en función del lado de la base.

65. Expresar V en función de x, siendo V el volumen de una caja sin tapa que se construye a partir de una pieza rectangular de metal de 12 cm $\times$ 15 cm recortando cuadrados iguales, de lado x, de cada esquina de la pieza y doblando hacia arriba los bordes del metal para formar los lados de la caja.

66. Se quiere fabricar envases cilíndricos de 1 litro de capacidad para anlatar jugos y otros productos. Expresar la cantidad de material necesario en función de la altura del recipiente. (No tomar en cuenta los desperdicios que pudieran producirse)

67. Expresar el área A y el perímetro P de un circulo en función del radio r. Hallar A en función de P.

68. Se quiere construir una caja de base cuadrada para contener un volumen de 10 m^3. Expresar el área total de los lados, el fondo y el tope en función de la longitud del lado de la base l. Hallar el dominio.

69. Exprese el volumen V de una esfera en función del radio r y en función de su diámetro d.

70. El ancho a de una caja rectangular es tres veces su longitud l y su altura h es dos veces su largo. Expresar el volumen V de la caja en función de: (a) su longitud; (b) su ancho; (c) su altura.

Respuestas: Ejercicios

1.1. Par; 1.2. Impar; 1.3. Ninguna; 1.4. Ninguna; 1.5. Impar; 1.6. Par; 1.7. Ninguna; 1.8. Impar;

7.1. $\frac{17}{2}$; 7.2. $\frac{9}{2}$; 7.3. 9; 7.4. 12; 7.5. $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$; 7.6. $2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$; 7.7. $\frac{9}{4}$; 7.8. $\frac{3}{4}$; 7.9. $\frac{11}{4}$;

7.10. 5; 7.11. 5; 7.12. $\frac{3}{10}$; 7.13. $\frac{13}{9}$; 7.14. $\frac{7}{72}$; 7.15. $\frac{1}{9}\sqrt{3}+\frac{1}{9}$; 8.1. $\frac{1}{2}\sqrt{2}-\sqrt{3}$; 8.2. $\frac{1}{2}-2\sqrt{3}$;

8.3. $-2\sqrt{2}-\frac{1}{3}$; 8.4. $\frac{25}{2}$; 8.5. $-\frac{1}{2}$; 8.6. $1-\frac{1}{4}\sqrt{2}$; 8.7. $\frac{9}{4}$; 8.8. $\frac{9}{10}$; 8.9. $\frac{1}{4}\sqrt{3}+2$; 8.10. 3;

8.11. $\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}$; 8.12. $\frac{1}{2}$; 8.13. 2; 8.14. $\frac{7}{40}$; 8.15. $\frac{2}{19}\sqrt{3}+\frac{2}{19}$; 9.1. $\cos^2 x+2\cos x+1$; 9.2. $1-\operatorname{sen} 2x$;

9.3. $\sec^2 x+\csc^2 x$; 9.4. $\operatorname{sen}^2 x$; 9.5. $-\tan^2\alpha$; 9.6. $-\cos 2x$; 9.7. $\cos^2 x-\cos^3 x-\operatorname{sen}^4 x+\cos^2 x\operatorname{sen}^2 x$;

9.8. $\tan^2(2\alpha)-2\tan(2\alpha)\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$; 9.9. $\operatorname{sen}^2 x-5\operatorname{sen} x+6$; 9.10. $\cos^2 x\operatorname{sen} x-2\cos^2 x+\cos^2 x\operatorname{sen}^2 x$;

10.1. $(\cos x+2)(\cos x+1)$; 10.2. $(\tan x+2)(\tan x-1)$; 10.3. $(\cos x+1)(2\cos x-1)$; 10.4. $(2\tan x-1)(\tan x-1)$;

10.5. $(4\sec x-1)(2\sec x-3)$; 10.6. $(1-\cos x)\left(\cos x+\cos^2 x+1\right)$; 10.7. $\left(\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen} x+4\right)(\operatorname{sen} x+2)$;

10.8. $(\operatorname{sen} x)\left(\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen} x+1\right)(\operatorname{sen} x+1)$; 10.9. $1+\operatorname{sen} 2x$; 10.10. $\sec^2 x+\tan^2 x$;

10.11. $\left(\csc 2x-\sqrt{2}\cos x\right)\left(\csc 2x+\sqrt{2}\cos x\right)$; 10.12. $(\tan x-\sec x)\left(\tan^2 x+\tan x\sec x+\sec^2 x\right)$;

10.13. $(\tan 2x-\tan x)(\tan 2x+\tan x)$; 10.14. $2\operatorname{sen} ax(\cos ax+\operatorname{sen} ax)$; 10.15. $2(\cos x-1)\operatorname{sen} a$;

10.16. $2\operatorname{sen} 2x(\cos 2x+\operatorname{sen} 2x-1)$; 10.17. $(1-2\operatorname{sen} x)(\cos 2x+2)$; 10.18. $\left(\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x\right)^2$;

11.1. $\frac{2\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}+\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}$; 11.2. $\frac{2}{\cos x\,\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}\right)}$; 11.3. $\frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}+\sqrt[3]{\operatorname{sen} x\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}$;

11.4. $\frac{1-2\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\operatorname{sen} 2x\cos x}+\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 2x}}$; 11.5. $\frac{-(\operatorname{sen} x+\cos x)\cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^4 x}+\sqrt[3]{\operatorname{sen}^4 x\cos^4 x}+\sqrt[3]{\cos^4 x}}$; 12.1. $\frac{\cos x+1}{\cos x-1}$; 12.2. $\frac{\cos x-2}{\cos x-1}$;

12.3. $\frac{-1}{\cos x+\cos^{1/3}x+\cos^{-1/3}x}$; 12.4. $\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}$; 12.5. $\frac{2}{\operatorname{sen} x-\cos x}$; 12.6. $\frac{\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)\tan^3 x}{1-\cos x}$;

12.7. $\frac{1+\cot x+\cot^2 x}{\cot x+2}$; 12.8. $\frac{\operatorname{sen} 2x}{\tan x+1}$; 12.9. ; 12.10. $\frac{2\cos^2 x+\cos x+1}{(1+\cos x)\cos x}$; 12.11. $\cos x\operatorname{sen} x$; 12.12. $-2\tan\alpha-6$;

12.13. $\frac{2\cos^2 x-\cos x-1}{\operatorname{sen}^2 x}$; 12.14. $-\tan^2 x$; 12.15. $1+\tan x\tan a$; 12.16. $\frac{\tan x^2}{x\operatorname{sen}\pi x}$; 12.17. $-(b-a)^2\cos x$;

12.18. $-2(a+b)$; 12.19. $\frac{1}{1+\cos x}$; 12.20. $-\operatorname{sen} 2x\cdot\cos 2(\cos 2x)$; 12.21. $-\frac{3\cos x+4}{1+\cos x}$; 12.22. $\frac{1}{(x-1)(1-\operatorname{sen} 2x)}$;

12.23. $\operatorname{sen} 2x\cos x$; 13.1. 2do cuadrante; 13.2. 3er cuadrante; 13.3. 4to cuadrante; 14.1. $\frac{2}{3}\pi$;

14.2. $\frac{5}{3}\pi$; 14.3. $\frac{19}{12}\pi$; 14.4. $-\frac{5}{6}\pi$; 14.5. $\frac{7}{3}\pi$; 14.6. $\frac{25}{9}\pi$; 15.a. $\alpha=\frac{\pi}{4}$; 15.b. $\alpha=\frac{4}{9}\pi$; 15.c. $\alpha=\pi$;

16. $\theta=\frac{360^\circ}{\pi}=114.59^\circ$; 17. 100; 18. $\cos\alpha=-\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\tan\alpha=\frac{2}{3}$, $\csc\alpha=-\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\sec\alpha=-\frac{\sqrt{13}}{3}$, $\cot\alpha=\frac{3}{2}$;

19. $\cos\beta=-\frac{4}{5}$, $\operatorname{sen}\beta=\frac{3}{5}$, $\tan\beta=-\frac{3}{4}$, $\csc\beta=\frac{5}{3}$, $\cot\beta=-\frac{4}{3}$; 20. $\operatorname{sen}\beta=-\frac{2xy}{x^2+y^2}$; 21. $\operatorname{sen}\alpha=\frac{2xy}{x^2+y^2}$;

22. $\frac{\operatorname{sen}^4 2\beta}{16}$; 23.1. $\frac{3\cot^2\alpha-\cot^4\alpha+1}{\left(\cot^2\alpha+1\right)\cot^2\alpha}$; 23.2. $\frac{\cot^2\alpha-\cot^6\alpha+1}{\cot^4\alpha}$; 25.1. $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$;

25.2. $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{4}{3}\pi$; 25.3. $x=\frac{1}{6}\pi$, $x=\frac{2}{3}\pi$; 25.4. $x=\frac{1}{2}\pi$, $x=\frac{3}{2}\pi$, $x=\frac{\pi}{6}$; 25.5. $x=\frac{1}{2}\pi$, $x=\frac{3}{2}\pi$, $x=\frac{7\pi}{6}$;

25.6. $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{7}{6}\pi$, $x=\frac{3}{2}\pi$; 25.7. $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$, $x=\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$; 25.8. $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$, $x=\frac{\pi}{6}$;

25.9. $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{5\pi}{4}$, $x=\frac{3\pi}{4}$, $x=\frac{7\pi}{4}$; 26.1. $\{n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$; 26.2. $\left\{\frac{1}{2}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 26.3. $\{n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$;

26.4. No tiene solución; 26.5. No tiene solución; 26.6. $\left\{\frac{1}{2}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\setminus\{n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$; 26.7. $\left\{\frac{1}{2}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

26.8. $\{2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$; 26.9. $\left\{\frac{1}{4}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 26.10. $\{2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$; 26.11. $\left\{\frac{1}{2}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

26.12. $\left\{-\frac{3}{4}\pi-n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 26.13. $\left\{2n\pi-\frac{1}{2}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 26.14. $\{(2n+1)\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$; 26.15. $\left\{n\pi-\frac{1}{4}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

26.16. $\{(2n+1)\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$; 26.17. $\left\{2n\pi-\frac{1}{2}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 26.18. $\left\{-\frac{1}{4}\pi-n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 26.19. $\left\{\frac{1}{4}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

26.20. No tiene solución; 26.21. $\{n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{1}{3}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{2n\pi-\frac{1}{3}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 26.22. $\left\{\frac{1}{2}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

26.23. $\mathbb{R}-\{n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$; 26.24. $\left\{\frac{1}{6}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 26.25. $\{n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{1}{4}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 26.26. ;

26.27. $\left\{\frac{1}{6}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{1}{6}\pi-n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 26.28. $\left\{\frac{1}{2}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{1}{3}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{2n\pi-\frac{1}{3}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

26.29. $\left\{2n\pi-\frac{1}{2}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{1}{6}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5}{6}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

27.1. $g_1(x)=\operatorname{sen} x$, $g_2(x)=\cos x$, $g_3(x)=x^2$, $f(x)=g_3(g_2(g_1(x)))$;

27.2. $g_1(x) = \operatorname{sen} x$, $g_2(x) = x^2$, $g_3(x) = \cos x$, $f(x) = g_3(g_2(g_1(x)))$;

27.3. $g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = \operatorname{sen} x$, $g_3(x) = \cos x$, $f(x) = g_3(g_2(g_1(x)))$;

27.4. $g_1(x) = \tan x$, $g_2(x) = -x$, $g_3(x) = 1 + x$, $g_4(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = g_4(g_3(g_2(g_1(x))))$;

27.5. $g_1(x) = x + 3$, $g_2(x) = \sqrt{x}$, $g_3(x) = -x$, $g_4(x) = 1 + x$, $g_5(x) = \cos x$, $f(x) = g_5(g_4(g_3(g_2(g_1(x)))))$;

27.6. $g_1(x) = x - 5$, $g_2(x) = \sqrt{x}$, $g_3(x) = x - 2$, $g_4(x) = \operatorname{sen} x$, $g_5(x) = -x$, $f(x) = g_5(g_4(g_3(g_2(g_1(x)))))$;

27.7. $g_1(x) = x^2 - 5x + 6$, $g_2(x) = \sec x$, $g_3(x) = x^6$, $f(x) = g_3(g_2(g_1(x)))$;

27.8. $g_1(x) = \frac{3-x}{x+5}$, $g_2(x) = \cos x$, $g_3(x) = -x$, $g_4(x) = 3 + x$, $f(x) = g_4(g_3(g_2(g_1(x))))$;

27.9. $g_1(x) = 3x^2$, $g_2(x) = x + 5$, $g_3(x) = \sqrt[3]{x}$, $g_4(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = g_4(g_3(g_2(g_1(x))))$;

27.10. $g_1(x) = x^2 - 2x - 3$, $g_2(x) = \cot x$, $g_3(x) = x^2$, $g_4(x) = -x$, $g_5(x) = 1 + x$, $g_6(x) = -\sqrt{x}$,
$f(x) = g_6(g_5(g_4(g_3(g_2(g_1(x))))))$;

27.11. $g_1(x) = x^2 + 3$, $g_2(x) = \tan x$, $g_3(x) = \sqrt{x}$, $g_4(x) = \csc x$, $g_5(x) = 8 + x$, $f(x) = g_5(g_4(g_3(g_2(g_1(x)))))$;

28.1. $\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{N}\right\}$; 28.2. $\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{N}\right\}$; 28.3. $\mathbb{R} - \{2n\pi / n \in \mathbb{N}\}$; 28.4. $\mathbb{R} - \{2n\pi / n \in \mathbb{N}\}$;

28.5. $\mathbb{R} - \{0, 1\}$; 28.6. $\mathbb{R}$; 28.7. $\left[-5, \frac{7}{2}\right)$; 28.8. $[2n\pi, (2n+1)\pi] - \left\{(4n+1)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{N}\right\}$; 28.9. $\mathbb{R}$;

28.10. $\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{N}\right\}$; 28.11. $(-\infty, -3] \cup [-2, \infty) - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{4} / n \in \mathbb{N}\right\}$; 28.12. $(-\infty, 0] - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{4} / n \in \mathbb{N}, n < 0\right\}$;

29.1. Impar; 29.2. Par; 29.3. Impar; 29.4. Impar; 29.5. Par; 29.6. Ninguna; 29.7. Impar; 29.8. Ninguna;

29.9. Impar; 33.1. Creciente : $\mathbb{R}$ si $m > 0$, decreciente : $\mathbb{R}$ si $m < 0$; 33.2. Creciente : $[0, \infty)$ y decreciente : $(-\infty, 0]$;

33.3. Creciente : $\mathbb{R}$; 33.4. Creciente : $[0, \infty)$ y decreciente : $(-\infty, 0]$; 33.5. Decreciente : $\mathbb{R} - \{0\}$;

33.6. Creciente : $(-\infty, 0]$ y decreciente : $[0, \infty)$; 33.7. Creciente : $[0, \infty)$; 33.8. Creciente : $\mathbb{R}$; 33.9. Creciente : $\mathbb{R}$;

33.10. Creciente : $(-\infty, 0]$ y decreciente : $[0, \infty)$; 33.11. Decreciente : $(-\infty, 2]$ y creciente : $[2, \infty)$; 33.12. Decreciente : $\mathbb{R} - \{2\}$;

33.13. Creciente : $\mathbb{R} - \{-3\}$; 33.14. Decreciente : $(-\infty, 1]$ y creciente : $[1, \infty)$; 34.1. Inyectiva; 34.2. No inyectiva;

34.3. Inyectiva; 34.4. No inyectiva; 34.5. Inyectiva; 34.6. No inyectiva; 34.7. Inyectiva; 34.8. Inyectiva;

34.9. Inyectiva; 34.10. No inyectiva; 34.11. No inyectiva; 34.12. Inyectiva; 34.13. Inyectiva; 34.14. No inyectiva;

43. $-2\sqrt{3}$ y $2\sqrt{3}$; 44. $x = 9$; 45. $(0,0) : (4,0) : (0,6)$; 46. Lado del cuadrado : $\frac{10\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}$ Lado del triángulo : $\frac{30}{9+4\sqrt{3}}$;

47. 50×25; 48. No existe; 49. $x = 5$ y $y = 5$; 50. $x = 5$: $y = -5$ y $d = 5\sqrt{2}$; 51. $\frac{9}{\sqrt{7}}$ km.;

52. Se corta en $\frac{4\sqrt{3}l}{9+4\sqrt{3}}$; 53. 50×50; 54. $x = 9$, $y = 18$; 55. $8\sqrt{5}$; 56. $x = 3$, $y = \frac{3}{4}(4 - \pi)$;

57. Ancho $= 40\sqrt{3}$; Altura $= 40\sqrt{6}$; 58. $2\sqrt{2}$; 59. $x = 2$; 60. $x = 20$, $y = 40$; 61. 10×40; 62. 20×50;

63. Mínimo : $\left(\frac{4}{4+\pi}, \frac{(\pi+2)^2}{4(\pi+4)^2}\right)$ Se corta en $\frac{4}{4+\pi}$: Máximo : $\left(0, \frac{1}{16}\right)$ Solo se hace el círculo; 64. $y = \frac{399}{64}$; 65. $x = \frac{25}{2}$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: “Cálculo". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: “Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.

Farith Briceño

Última actualizacón: Septiembre 2010

e-mail : farith_72@hotmail.com